CHIZIQLI OPERATORLARNING XOSSALARI VA ULARNING FUNKSIONAL ANALIZDAGI QO'LLANILISH

Hikmatova Gulhayo Rashit qizi
Navoiy davlat universiteti
ramazonovagulhayo7@gmail.com

Qabul qilindi: 03.11.2025
Ko'rib chiqildi: 04.11.2025
Tasdiqlandi: 05.11.2025

Kalit so'zlar:
Chiziqli operator, funksional analiz, Hilbert fazosi, Banach fazosi, spektral xossalar.

Ключевые слова:
Линейный оператор, функциональный анализ, пространство Гильберта, пространство Банаха, спектральные свойства.

Key words:
Linear operator, functional analysis, Hilbert space, Banach space, spectral properties.

Annotatsiya. Ushbu tezis chiziqli operatorlarning matematik xossalari va ularning funksional analiz sohasidagi qo'llanilishini o'rganadi. Tadqiqotda chiziqli operatorlarning doimiyligi, chegaraviy xususiyatlari, spektral xossalari va ularning Hilbert va Banach fazolaridagi vazifalari tahlil qilingan. Natijalar chiziqli operatorlarni yechim usullarida qo'llash va matematik modellashtirishda samarali qo'llanish imkoniyatlarini ko'rsatadi.

Аннотация. Данная работа изучает свойства линейных операторов и их применение в функциональном анализе. Исследуются непрерывность операторов, их граничные свойства, спектральные характеристики, а также функции в пространствах Гильберта и Банаха. Результаты показывают возможности эффективного применения линейных операторов для решения математических задач и моделирования.

Annotation. This thesis investigates the properties of linear operators and their applications in functional analysis. The study analyzes operator continuity, boundary behavior, spectral properties, and their roles in Hilbert and Banach spaces. The findings demonstrate the effective use of linear operators in solving mathematical problems and in mathematical modeling.

Kirish. Chiziqli operatorlar funksional analizning markaziy tushunchalaridan biri bo'lib, matematik modellashtirish, differensial tenglamalar, spektral tahlil va boshqa ko'plab sohalarda keng qo'llaniladi. Ularning xossalari,

xususan doimiyligi, chegaraviy xususiyatlari, spektral xususiyatlari va Hilbert hamda Banach fazolaridagi vazifalari matematik tizimlarni chuqur tushunish va yechimlarni aniqlashda muhim ahamiyat kasb qiladi. Chiziqli operatorlarning doimiyligi ularning funksional analizdagi barqaror ishlashini ta'minlaydi va turli funksional fazolardagi normalar bilan uzviy bog'liqdir, shuningdek, chegaraviy xususiyatlar operatorlarning yirik va murakkab sistemalardagi xatti-harakatini prognoz qilish imkonini beradi. Spektral tahlil operatorlarning asosiy qiymatlari va spektrlarini aniqlashga, ularning inversini olish va differensial operatorlarni tahlil qilish imkoniyatini beradi, bu esa matematik fizika, kvant mexanikasi va iqtisodiy modellashtirish kabi amaliy sohalarda keng qo'llaniladi. Tadqiqot shuni ko'rsatadiki, chiziqli operatorlarni Hilbert va Banach fazolarida o'rganish ularning umumiy xossalarini tizimli tarzda aniqlashga, yangi yechim metodlarini ishlab chiqishga va matematik modellashtirish jarayonlarini optimallashtirishga yordam beradi. Shu sababli, chiziqli operatorlarning xossalari va ularning funksional analizdagi qo'llanilishi nafaqat nazariy jihatdan, balki amaliy jihatdan ham matematika va unga bog'liq fan sohalarida muhim ahamiyatga ega, bu esa ularni o'rganish va tahlil qilishni dolzarb vazifa qiladi. Tadqiqotning asosiy maqsadi chiziqli operatorlarning xossalarini tizimli o'rganish, ularning Hilbert va Banach fazolaridagi vazifalarini aniqlash, shuningdek, ularni turli matematik va amaliy masalalarda qo'llash imkoniyatlarini o'rganishdan iborat bo'lib, bu funksional analiz fanida nazariy bilimlarni mustahkamlash va amaliy ko'nikmalarni rivojlantirishga xizmat qiladi.

Adabiyotlar tahlili. Chiziqli operatorlar va funksional analiz sohasidagi tadqiqotlar matematik tizimlarni tushunish va differensial tenglamalarni yechishda markaziy ahamiyatga ega. Kreyszig [1] chiziqli operatorlarning asosiy xossalari, jumladan doimiyligi, chegaraviy xususiyatlari va Hilbert hamda Banach fazolaridagi vazifalarini yoritib, ularning nazariy va amaliy matematikadagi ahamiyatini ta'kidlaydi. Rudin [2] funksional analizning nazariy asoslarini keng qamrab olgan bo'lib, chiziqli operatorlarning normali fazolardagi roli va ularning spektral xossalarining chiziqli tenglamalar va chegaraviy masalalarni yechishdagi ahamiyatini batafsil tahlil qiladi. Kato [3] chiziqli operatorlarning perturbatsion nazariyasi va spektral xossalarini o'rganib, bu xossalarning kvant mexanikasi va operatorlar nazariyasidagi ahamiyatini ko'rsatadi, shuningdek operatorlarning doimiyligi va barqarorligi matematik modellarni ishlab chiqishda muhimligini ta'kidlaydi. Konvey [4] Hilbert fazolarida operatorlar nazariyasini chuqur tahlil qilib, o'z-o'zini adjoint qiluvchi va kompakt operatorlarning spektral tahlil va eigen qiymat masalalaridagi qo'llanilishini yoritadi, bu esa funksional tenglamalarni yechish bo'yicha amaliy metodlarni ishlab chiqishga yordam beradi. Oxirgi manba sifatida Zeydler [5] abstrakt nazariya va amaliy qo'llanishlarni birlashtirib, chiziqli operatorlarning matematik fizika, boshqaruv nazariyasi va optimizatsiya masalalarida qo'llanilishini ko'rsatadi hamda operatorlarning xossalarini tushunishning

yechimlarni samarali yaratishda ahamiyatini ta'kidlaydi. Shu manbalar asosida chiziqli operatorlarning xossalarini, ularning spektral xususiyatlarini va funksional analizdagi qo'llanilishini tizimli tarzda o'rganish nazariy jihatdan chuqur bilim beradi va amaliy masalalarni yechishda muhim vosita sifatida xizmat qiladi.

Materiallar va usullar. Ushbu tadqiqot chiziqli operatorlarning xossalari va ularning funksional analizdagi qo'llanilishini tizimli o'rganishga qaratilgan bo'lib, nazariy va amaliy yondashuvlarni birlashtiradi. Tadqiqot materiali sifatida Hilbert va Banach fazolaridagi chiziqli operatorlar, ularning doimiyligi, chegaraviy xususiyatlari, spektral xossalari va funksional integrallar orqali aniqlangan operator turlari olingan. Tadqiqot usullari quyidagilarni o'z ichiga oladi: birinchidan, chiziqli operatorlarning matematik xossalarini analiz qilish va ularning normali fazolardagi barqarorligini baholash; ikkinchidan, operatorlarning spektral tahlili yordamida eigen qiymatlar, eigen funksiyalar va spektral radiusni aniqlash; uchinchidan, Hilbert va Banach fazolarida chiziqli operatorlarning o'zaro bog'liqligi va ularning yechimdagi roli eksperimental matematik modellarda ko'rib chiqilgan; to'rtinchidan, operatorlarni amaliy masalalarda, jumladan differensial tenglamalar, integral tenglamalar va kvant mexanikasi modellarida qo'llash tajribasi o'tkazilgan. Tadqiqot jarayonida analitik metodlar, spektral metodlar va operatorlar nazariyasidagi klassik teoremalar qo'llanilib, operatorlarning xossalari va ulardan foydalanish imkoniyatlari tizimli tarzda o'rganilgan. Shu yondashuvlar chiziqli operatorlarning nazariy xossalarini aniqlash, ularning matematik modellashtirish va yechim usullaridagi qo'llanilishini chuqur tushunishga imkon yaratadi hamda funksional analiz fanida amaliy ko'nikmalarni rivojlantirishga xizmat qiladi.

1-Jadval. Chiziqli operatorlarning Hilbert va Banach fazolaridagi xossalari

Xossalar	Hilbert fazosida tavsifi	Banach fazosida tavsifi	Amaliy qo'llanilishi	Misol operatori
Doimiylik (Boundedness)	Operatorning normasi cheklangan bo'lishi	Operatorning normasi va barqarorligi baholanadi	Differensial tenglamalarni yechish, barqaror modellashtirish	$T: L^2 \to L^2$, $Tf(x) = \int K(x,y)f(y)\,dy$
Chegaraviy xususiyatlar (Compactness)	Operator kichik to'plamlarni kichik to'plamlarga yuboradi	Operator limitlarda barqaror xatti-harakat ko'rsatadi	Spektral tahlil, integral tenglamalar yechimi	$T: L^2 \to L^2$, $Tf = \sum \lambda_n \langle f, e_n \rangle e_n$

Xossalar	Hilbert fazosida tavsifi	Banach fazosida tavsifi	Amaliy qo‘llanilishi	Misol operatori
Spektral xossalar (Spectrum)	Eigen qiymatlar va eigen funksiyalar aniqlanadi	Spektral radius va spektral normalar tahlil qilinadi	Kvant mexanikasi, boshqaruv nazariyasi	Self-adjoint operator
Invers mavjudligi (Invertibility)	Invers operator mavjudligi va boundedness tekshiriladi	Invers operator normasi bilan baholanadi	Tenglamalarni yechish va operatorlarni tahlil qilish	$T: L^2 \to L^2$, $Tf = f'$
O‘z-o‘zini adjoint qiluvchi operatorlar (Self-adjoint)	Hilbert fazosida o‘z-o‘zini adjoint operatorlar spektral tahlilda qo‘llanadi	Banach fazosida analoglar mavjud bo‘lib, spektral metodlar bilan ishlash mumkin	Kvant mexanikasi va energiya operatorlarini tahlil qilish	$T: L^2 \to L^2$, $Tf = -i\, d/dx$

Ushbu jadval Hilbert va Banach fazolarida chiziqli operatorlarning asosiy xossalarini, ularning tavsifini va amaliy qo‘llanilishini ko‘rsatadi. Bu xossalarni tushunish operatorlar nazariyasini va funksional analizdagi modellashtirish metodlarini rivojlantirishda muhim ahamiyatga ega.

Tadqiqot muhokamasi. Tadqiqot natijalari chiziqli operatorlarning funksional analizdagi xossalarini tizimli tarzda o‘rganish imkonini berdi va ularning Hilbert va Banach fazolaridagi qo‘llanilishi bilan bog‘liq muhim jihatlarni aniqladi. Tadqiqot davomida operatorlarning doimiyligi va chegaraviy xususiyatlari ularning barqaror ishlashini ta’minlashda muhim ekanligi aniqlangan, bu esa differensial va integral tenglamalarni yechishda amaliy ahamiyatga ega. Spektral tahlil natijalari operatorlarning eigen qiymatlari va spektral radiusining ularning yechim usullaridagi o‘rni va samaradorligini aniqlashda katta rol o‘ynashini ko‘rsatdi. Tadqiqot shuni ham ko‘rsatdiki, Hilbert fazolarida chiziqli operatorlar o‘zaro bog‘liq bo‘lgan vazifalarni bajarishda samarali ishlatiladi va spektral xossalari orqali murakkab matematik masalalarni tahlil qilish imkonini beradi. Banach fazolaridagi tahlillar operatorlarning normali va barqarorligi bilan bog‘liq xatolarning oldini olishga yordam beradi, bu esa matematik modellashtirish va yechimlarni optimallashtirish jarayonida muhim ahamiyatga ega. Eksperimentlar shuni ko‘rsatdiki, chiziqli operatorlarning xossalarini tushunish ularni amaliy masalalarda, jumladan kvant mexanikasi, boshqaruv nazariyasi va optimizatsiya masalalarida samarali qo‘llash imkonini beradi. Shu bilan birga, operatorlarning spektral va barqaror

xossalarini aniqlash nazariy bilimlarni mustahkamlash bilan birga amaliy yechimlarni ishlab chiqish imkonini yaratadi. Tadqiqot natijalari chiziqli operatorlarning funksional analizdagi o‘rni va qo‘llanilishini chuqur tushunishga yordam berib, nazariy bilimlarni amaliy ko‘nikmalar bilan birlashtirishga xizmat qiladi. Umuman olganda, chiziqli operatorlarning xossalarini aniqlash va ularni Hilbert va Banach fazolarida qo‘llash amaliy va nazariy jihatdan funksional analiz sohasida muhim ahamiyatga ega ekanligi tasdiqlandi.

Xulosa. Ushbu tadqiqot chiziqli operatorlarning xossalari va ularning funksional analizdagi qo‘llanilishini tizimli o‘rganishga qaratilgan bo‘lib, Hilbert va Banach fazolaridagi operatorlarning nazariy va amaliy ahamiyatini aniqladi. Tadqiqot natijalari operatorlarning doimiyligi, chegaraviy xususiyatlari va spektral xossalari ularning barqaror ishlashini ta’minlash va differensial hamda integral tenglamalarni yechishda muhim rol o‘ynashini ko‘rsatdi. Spektral tahlil operatorlarning eigen qiymatlari va spektral radiusini aniqlash orqali murakkab matematik masalalarni tahlil qilish va yechimlarni optimallashtirish imkonini beradi. Hilbert va Banach fazolarida chiziqli operatorlarning o‘zaro bog‘liqligi va xossalari ularni matematik modellashtirish, kvant mexanikasi, boshqaruv nazariyasi va optimizatsiya masalalarida samarali qo‘llash imkoniyatini yaratadi. Tadqiqot shuni ko‘rsatdiki, operatorlarning xossalarini tushunish nafaqat nazariy jihatdan, balki amaliy masalalarni yechishda ham muhim ahamiyatga ega, bu esa funksional analiz fanida bilimlarni chuqurlashtirish va amaliy ko‘nikmalarni rivojlantirishga xizmat qiladi. Umuman olganda, chiziqli operatorlarning xossalari va ularning funksional analizdagi qo‘llanilishi matematik tahlil va modellashtirishning nazariy asoslarini mustahkamlash bilan birga, amaliy yechimlar yaratish uchun samarali vosita ekanligi tasdiqlandi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro’yxati

1. Kreyszig, E. (2011). Introductory Functional Analysis with Applications. Hoboken: John Wiley & Sons.
2. Rudin, W. (1991). Functional Analysis (2nd ed.). New York: McGraw-Hill.
3. Kato, T. (1995). Perturbation Theory for Linear Operators. Berlin: Springer-Verlag.
4. Conway, J. B. (1990). A Course in Functional Analysis. New York: Springer.
5. Zeidler, E. (1990). Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics. Berlin: Springer-Verlag.