LEBEG INTEGRALI VA UNING REAL ANALIZDAGI QO'LLANILISHI

Rizoqulova Sitora Sobirjon qizi
NDKTU assistenti
E-mail: sitorrizoqulova99@gmail.com

Qabul qilindi: 03.11.2025
Ko'rib chiqildi: 04.11.2025
Tasdiqlandi: 05.11.2025

Kalit so'zlar:
Lebeg integrali, real analiz, L^1 fazosi, L^2 fazosi, o'lchov nazariyasi, konvergensiya, funksional tahlil.

Key words:
Lebesgue integral, real analysis, L^1 space, L^2 space, measure theory, convergence, functional analysis.

Ключевые слова:
Интеграл Лебега, реальный анализ, пространство L^1, пространство L^2, теория меры, сходимость, функциональный анализ.

Annotatsiya. Ushbu tezisda Lebeg integrali va uning real analizdagi qo'llanilishi tahlil qilinadi. Tadqiqotda Lebeg integrali nazariyasi, uning Riemann integralidan farqlari va murakkab funksiyalarni o'lchashdagi afzalliklari yoritilgan. Shuningdek, Lebeg integrali yordamida uzluksiz bo'lmagan va silliq bo'lmagan funksiyalarning integrallari hisoblanishi, L^1 va L^2 fazolarida konvergensiya masalalarining tahlili va matematik tahlilning amaliy masalalarida qo'llanilishi ko'rsatib o'tilgan. Ushbu ish real analiz, funktsional tahlil va differensial tenglamalar yechimlarida Lebeg integrali qo'llanishining nazariy va amaliy ahamiyatini ochib beradi.

Annotation. This thesis analyzes the Lebesgue integral and its applications in real analysis. It highlights the theory of Lebesgue integration, differences from the Riemann integral, and advantages in measuring complex functions. The study also demonstrates the use of the Lebesgue integral for integrating discontinuous and non-smooth functions, analyzing convergence in L^1 and L^2 spaces, and its applications in practical problems of mathematical analysis. This work emphasizes the theoretical and practical importance of Lebesgue integration in real analysis, functional analysis, and solving differential equations.

Аннотация. В данной работе рассматривается интеграл Лебега и его применение в области математического анализа. Освещена теория интеграла Лебега, его отличия от интеграла Римана и преимущества при измерении сложных

функций. Также показано применение интеграла Лебега для интегрирования несглаженных и разрывных функций, анализ сходимости в пространствах L^1 и L^2 и его практическое использование при решении задач математического анализа. Работа подчеркивает теоретическое и практическое значение интеграла Лебега в реальном анализе, функциональном анализе и решении дифференциальных уравнений.

Kirish. Lebeg integrali real analizning eng muhim tushunchalaridan biri bo‘lib, u Riemann integrali bilan chegaralangan imkoniyatlarni kengaytirish maqsadida ishlab chiqilgan. Riemann integrali silliq va uzluksiz funksiyalarni integrallashda qulay bo‘lsa-da, uzluksizligi buzilgan yoki murakkab o‘lchovga ega bo‘lgan funksiyalarni hisoblashda cheklovlarga ega. Shu sababli, Lebeg integrali matematik tahlil va real analizda yangi paradigmani yaratdi, u o‘lchov nazariyasi, konvergensiya masalalari va funktsional fazolarni o‘rganishda keng qo‘llaniladi. Lebeg integrali yordamida L^1 va L^2 fazolaridagi funksiyalarni tahlil qilish, integrallarni hisoblash va ularning konvergensiyasini o‘rganish mumkinligi real analizning nazariy va amaliy masalalarida katta ahamiyat kasb etadi. Shuningdek, Lebeg integrali yordamida uzluksiz bo‘lmagan funksiyalar, murakkab signal va fizik jarayonlar matematik jihatdan aniq tavsiflanadi, bu esa differensial tenglamalar, integral tenglamalar va funktsional tahlilning turli masalalarini yechishda muhim vosita sifatida xizmat qiladi. Tadqiqot doirasida Lebeg integrali nazariyasi, uning Riemann integrali bilan solishtirilishi, murakkab funksiyalarga qo‘llanilishi va amaliy misollari yoritiladi, shu bilan birga real analizda ushbu integrallash usulining samaradorligi va nazariy ahamiyati chuqur tahlil qilinadi. Mazkur ish Lebeg integrali orqali matematik tahlilning rivojlanishiga hissa qo‘shish va uning amaliy qo‘llanilishini kengaytirish maqsadida olib borilgan.

Materiallar va usullar. Ushbu tadqiqotda Lebeg integrali va uning real analizdagi qo‘llanilishini o‘rganish uchun nazariy tahlil, matematik modellashtirish va analitik yondashuvlar qo‘llanildi. Tadqiqot materiallari sifatida Riemann va Lebeg integrallari, L^1 va L^2 fazolari, o‘lchov nazariyasi, konvergensiya masalalari va funktsional tahlil asoslari tanlandi. Nazariy tahlil bosqichida Lebeg integrali va Riemann integrali o‘rtasidagi farqlar, ularning kuchli va zaif tomonlari hamda murakkab funksiyalarni integrallashdagi afzalliklari o‘rganildi. Analitik metodlar yordamida uzluksiz va silliq bo‘lmagan

funksiyalar uchun integrallarning hisoblanishi, L^1 va L^2 fazolarida konvergensiya masalalari tahlil qilindi. Shuningdek, Lebeg integrali asosida differensial va integral tenglamalar yechimlarini topish usullari o‘rganildi. Tadqiqotda matematik modellashtirish MATLAB va Mathematica dasturlari yordamida amalga oshirildi, bunda turli turdagi funksiyalar — uzluksiz, uzluksizligi buzilgan, murakkab chastotali va tasodifiy signallar — uchun Lebeg integrali hisoblash algoritmlari sinovdan o‘tkazildi. Ushbu usullar orqali integrallarni hisoblash aniqligi, konvergensiya tezligi va raqamli natijalar tahlil qilindi. Bundan tashqari, Lebeg integrali yordamida amaliy masalalar, jumladan signalni qayta ishlash, fizik jarayonlarni modellashtirish va funktsional tahlil masalalarida integrallash samaradorligi baholandi. Shu tariqa, tadqiqotda qo‘llanilgan materiallar va usullar nazariy va raqamli tahlil orqali Lebeg integrali qo‘llanilishini keng qamrovda o‘rganish imkonini berdi hamda real analiz va amaliy matematikada uning ahamiyatini aniqlashga xizmat qildi.

1-Jadval. Lebeg integrali va uning real analizdagi qo‘llanilishi

Aspekt	Ta’rif / Usul	Amaliy qo‘llanilishi	Afzalliklari
Lebeg integrali	Funksiyalarni o‘lchov nazariyasi asosida integrallash usuli	L^1 va L^2 fazolarida integrallarni hisoblash, differensial va integral tenglamalarni yechish	Uzluksiz bo‘lmagan yoki murakkab funksiyalarni hisoblash imkoniyati, “deyarli hamma joyda” konvergensiya
Riemann integrali bilan farqi	Cheklangan bo‘lgan intervallar va silliq funksiyalar uchun	Oddiy funksiyalarni hisoblash	Keng qo‘llaniladi, oddiy formulalar bilan aniqlanadi, ammo murakkab funksiyalarda cheklangan
L^1 fazosi	Integrallash mumkin bo‘lgan funktsiyalar to‘plami	Konvergensiya va normani o‘lchash	Lebeg integrali orqali barqaror konvergensiya

Aspekt	Ta'rif / Usul	Amaliy qo'llanilishi	Afzalliklari
L^2 fazosi	Kvadrat integrallanishi mumkin bo'lgan funktsiyalar to'plami	Funktsional tahlil, Hilbert fazolari	Signalni qayta ishlash, raqamli modellashtirish
MATLAB/Mathematica modellashtirish	Lebeg integralini raqamli hisoblash	Integrallash natijalarini tahlil qilish, grafiklarni hosil qilish	Amaliy modellashtirish, konvergensiya va aniqlikni vizualizatsiya qilish

Yuqoridagi jadval Lebeg integrali va uning real analizdagi qo'llanilishini tizimli tarzda ifodalaydi. Jadvalda beshta asosiy aspekt — Lebeg integrali, Riemann integrali bilan farqi, L^1 va L^2 fazolari hamda MATLAB/Mathematica dasturlarida raqamli modellashtirish — ko'rsatib o'tilgan. Har bir ustunda usul yoki tushuncha ta'riflangan, uning amaliy qo'llanilishi va afzalliklari bayon qilingan. Shu orqali Lebeg integrali nafaqat nazariy jihatdan, balki amaliy masalalarda ham qanday ishlatilishini aniq tushunish mumkin. Masalan, L^1 va L^2 fazolari Lebeg integrali yordamida konvergensiya va funktsional tahlilni o'rganish imkonini beradi, MATLAB va Mathematica modellashtirish esa integrallash jarayonini raqamli tarzda kuzatish va grafik natijalar hosil qilish imkonini yaratadi. Jadval Lebeg integrali qo'llanilishining nazariy asoslarini va amaliy samaradorligini bir qarashda ko'rsatib, real analiz va matematik tahlil sohasidagi muhim jihatlarni vizual tarzda taqdim etadi.

Tadqiqot muhokamasi. Tadqiqot natijalari Lebeg integrali va uning real analizdagi qo'llanilishini chuqur tahlil qilish imkonini berdi. Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, Lebeg integrali Riemann integraliga nisbatan murakkab va uzluksiz bo'lmagan funksiyalarni hisoblashda sezilarli afzalliklarni beradi. L^1 va L^2 fazolarida integrallarning konvergensiyasi tahlil qilinganida, Lebeg integrali yordamida "deyarli hamma joyda" konvergensiya kuzatilishi, ayniqsa silliq bo'lmagan yoki cheklangan nuqtalarda uzluksizligi buzilgan funksiyalar uchun barqaror natija berishi aniqlangan. Tadqiqot davomida MATLAB va Mathematica dasturlari yordamida raqamli modellashtirish olib borilgan bo'lib, turli funksiyalarni integrallash va konvergensiyani kuzatish orqali amaliy natijalar olingan. Bu jarayon Lebeg integrali yordamida differensial tenglamalar, integral tenglamalar va signalni qayta ishlash masalalarini yechishda uning samaradorligini ko'rsatdi. Shuningdek, Lebeg integrali va Riemann integrali o'rtasidagi farqlar, ularning qo'llanilish sohalari va konvergensiya xususiyatlari

batafsil tahlil qilindi. Tadqiqot shuni ham ko‘rsatdiki, Lebeg integrali nazariy jihatdan funktsional tahlil va real analizning rivojlanishiga katta hissa qo‘shadi, amaliy jihatdan esa matematik modellashtirish, raqamli signallarni tahlil qilish, fizik jarayonlarni modellashtirish va boshqa ko‘plab sohalarda qo‘llanilishi mumkin. Shu tariqa, tadqiqot muhokamasi Lebeg integrali qo‘llanilishining nazariy va amaliy aspektlarini mukammal yoritib, uning real analizdagi ahamiyati va imkoniyatlarini keng qamrovda ko‘rsatdi.

Xulosa. Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, Lebeg integrali real analiz va funktsional tahlilning muhim vositasi sifatida keng qo‘llanilishi mumkin. Lebeg integrali yordamida silliq bo‘lmagan, uzluksizligi buzilgan yoki murakkab o‘lchovga ega funksiyalarni ham aniq va barqaror integrallash mumkinligi tasdiqlandi. L^1 va L^2 fazolarida konvergensiya tahlillari Lebeg integrali yordamida “deyarli hamma joyda” yaqinlashuvni ta’minlash mumkinligini ko‘rsatdi, bu esa matematik tahlil va raqamli modellashtirishda samaradorlikni oshiradi. Tadqiqot davomida raqamli modellashtirish va MATLAB hamda Mathematica dasturlari orqali olingan natijalar integrallashning nazariy va amaliy jihatlarini mustahkamladi, shuningdek, differensial va integral tenglamalarni yechishda, signalni qayta ishlash va fizik jarayonlarni tahlil qilishda Lebeg integrali qo‘llanilishini tasdiqladi. Shu tariqa, Lebeg integrali nafaqat nazariy tahlilda, balki amaliy matematik modellashtirish va real analizdagi murakkab masalalarni yechishda muhim ahamiyatga ega ekanligi aniqlandi.

Foydalanilgan adabiyotlar royxati

1. Lebesgue H. Leçons sur l’intégration et la recherche des fonctions primitives. Gauthier-Villars, Paris, 1904.
2. Royden H. L. Real Analysis. Macmillan, New York, 1988.
3. Folland G. B. Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications. John Wiley & Sons, 1999.
4. Stein E. M., Shakarchi R. Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces. Princeton University Press, 2005.
5. Bartle R. G. The Elements of Real Analysis. John Wiley & Sons, 2011.
6. Wheeden R. L., Zygmund A. Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis. Marcel Dekker, 1977.
7. Zaanen A. C. Integration. North-Holland, Amsterdam, 1987.